

# معرفی ماتریسهای جرم و سختی ساختمانهای پیچشی در شرایط کاملاً نامنظم

محمود حسینی<sup>1</sup> و غلامرضا لگزیان<sup>2</sup>

1- دانشیار پژوهشکده مهندسی سازه پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله

*Email: hosseini@iiees.ac.ir*

2- دانشجوی دکترای مهندسی زلزله و عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر

*Email: ghiegzian@yahoo.com*

## چکیده

در پژوهشهای انجام شده در مورد ساختمانهای پیچشی جهت فرموله کردن و خلاصه نمودن ماتریسهای سختی و جرم جهت ارائه روابط تحلیلی پاسخ لرزه ای آنها عمدتاً فرض گردیده که مراکز سختی تمام طبقات بر روی یک محور قائم و تمام مراکز جرم طبقات نیز بر روی یک محور قائم دیگر واقع می باشند. واضح است که این فرض در اغلب موارد بسیار دور از واقع است و اختلاف شکل و مساحت پلان طبقات مختلف ساختمان باعث می گردد که مراکز سختی و همچنین مراکز جرم طبقات، هیچیک روی یک راستای قائم واقع نشوند و در نتیجه روابط ارائه شده برای ماتریسهای سختی و جرم به هیچوجه حالت کلی نداشته باشند. در راستای حل این مشکل در این مقاله اقدام به استخراج ماتریسهای جرم و سختی ساختمانهای پیچشی در شرایط کاملاً نامنظم شده است. یعنی در هر طبقه از ساختمان مرکز جرم و سختی را می توان هر نقطه دلخواهی در نظر گرفت. بدیهی است با مشخص شدن ماتریسهای جرم و سختی به راحتی می توان فرکانسها و شکل مودهای ارتعاش سازه را تعیین و سپس با استفاده از روش تحلیل مودال اقدام به تحلیل دینامیکی و یا شبه دینامیکی سازه نمود. در این مقاله با استفاده از ماتریسهای استخراج شده برای ساختمانهای پیچشی تأیید خروج از مرکزیتها طبقات در فرکانسها و به ویژه شکل های ارتعاشی نیز طی چند مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

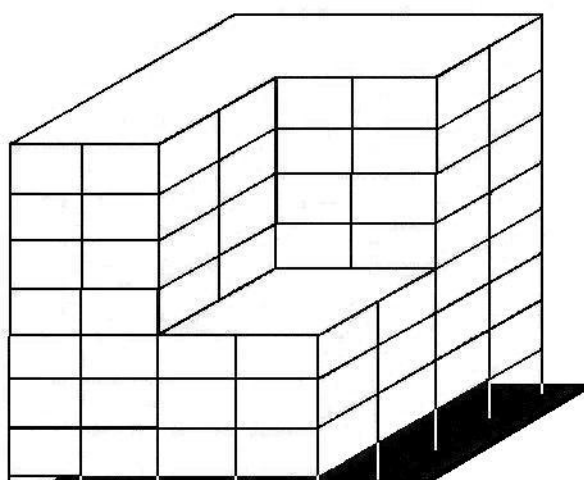
**واژگان کلیدی:** ساختمان پیچشی، مراکز جرم طبقات، مراکز سختی طبقات، ماتریس جرم، ماتریس سختی، تحلیل مودال

## 1 - مقدمه

خرابی ساختمانها در هنگام وقوع زلزله ، سالهای مدیدی است که فکر مهندسين سازه و به ویژه متخصصين مهندسی زلزله را بخود مشغول ساخته است . یکی از عوامل مهم تخریب زودرس ساختمانها بوجود آمدن لنگرهای پیچشی می باشد. یک ساختمان به د و علت می تواند دچار پیچش شود. یک علت مهم و اساسی، عدم تطبیق مرکز جرم با مرکز سختی در هر یک از طبقات ساختمان بوده و علت دیگر وجود تحریکات پیچشی در زمین زیر پی ساختمان در هنگام وقوع زلزله می باشد. در نتیجه برای درک رفتار واقعی سازه در هنگام وقوع زلزله، لازم است این اثرات پیچشی به دقت مورد مطالعه و توجه قرار گیرند.

هر چه رفتار سازه واقعی تر در نظر گرفته شود و عوامل مختلفی که بر رفتار سازه موثر هستند دقیقتر مورد مطالعه و بررسی قرار گیرند ، بهتر و دقیقتر می توان عملکرد سازه را در هنگام وقوع زلزله پیش بینی نمود . یکی از عوامل مهم در این مورد در نظر گرفتن اثر پیچش در ساختمانها می باشد. برای در نظر گرفتن این اثرات پیچشی بصورت پارامتری، لازم است یک ساختمان با هر تعداد طبقات که در حالت کلی مرکز جرم و مرکز سختی هر طبقه در نقاط دلخواه واقع می باشند در نظر گرفت. ساختمان در نظر گرفته شده یک ساختمان سه بعدی برشی می باشد . برشی بودن ساختمان به این معنی می باشد که تیرهای ساختمان در مقابل لنگر خمشی بصورت صلب عمل می نمایند . بدیهی است چنین فرضی مقداری خطا به دنبال خواهد داشت. در هر صورت اگر بخواهیم ساختمان را بصورت خمشی کامل مدل نماییم نمی توان اقدام به تحلیل پارامتری سازه نمود زیرا در هر یک از درایه های ماتریس سختی لازم است اثر سختی تمام تیرها و ستونهای ساختمان لحاظ گردد که این مطلب امری غیر ممکن می باشد . ولی اگر بتوان سختی نسبی جانبی هر طبقه را با دقت مناسبی بدست آورد قطعاً میزان خطای تبدیل ساختمان خمشی به ساختمان برشی به شدت کاهش خواهد یافت.

در بسیاری از ساختمانها، مراکز جرم و سختی طبقات بر یکدیگر منطبق نمی باشند . بخصوص در ساختمانهای پس نشسته وقوع چنین امری قطعی است. بعنوان مثال در شکل زیر عدم تطبیق مراکز جرم و سختی طبقات پس نشسته بر طبقات پایین بوضوح مشخص می باشد :



شکل 1 : عدم تطبیق مراکز جرم و سختی طبقات بر یکدیگر

## 2 - درجات آزادی یک ساختمان پیچشی - برشی

در حالت کلی هر یک از طبقات ساختمان پیچشی - برشی ، دارای یک درجه آزادی افقی در جهت  $X$  ، یک درجه آزادی افقی در جهت  $Y$  و یک درجه آزادی دورانی حول محور  $Z$  ( محور قائم ) بوده و لذا در مجموع هر طبقه از ساختمان دارای سه درجه آزادی می باشد. به عنوان مثال تعداد درجات آزادی یک ساختمان ده طبقه پیچشی - برشی برابر سی درجه آزادی می باشد.

نکته قابل توجه دیگر آن است که در هر یک از طبقات ساختمان، درجات آزادی را در کدام نقطه از سقف قرار دهیم. از لحاظ تئوری می توان درجات آزادی هر سقف را در هر نقطه دلخواه واقع بر صفحه ای منطبق بر آن سقف قرار داد. ولی برای ساده تر و هماهنگ شدن محاسبات، در این مقاله دو حالت کلی در نظر گرفته می شوند که به شرح زیر می باشند :

حالت اول : سه درجه آزادی هر سقف بر روی مرکز سختی ستونهای آن طبقه قرار داده می شود .

حالت دوم : سه درجه آزادی هر سقف بر روی مرکز جرم آن سقف قرار داده می شود .

هر یک از دو روش فوق، منجر به تشکیل یک روابط پارامتری خاص، برای ماتریسهای جرم  $M$  و سختی سازه خواهد شد که لازم است روابط لازم برای هر حالت بطور مجزا مورد بررسی قرار گیرند.

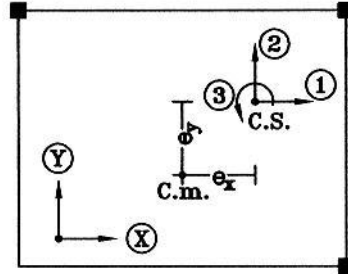
البته با توجه به آنکه فرکانسها و مودهای ارتعاشی یک سازه مستقل از محل در نظر گرفتن درجات آزادی سازه می باشند لذا نهایتاً در هر دو روش، باید فرکانسهای ارتعاشی بدست آمده کاملاً یکسان بوده و همچنین شکل نهایی مودهای ارتعاشی نیز با یکدیگر مشابه باشند. البته با توجه به آنکه محل قرار گیری درجات آزادی در حالتهای اول و دوم با یکدیگر متفاوت می باشند لذا بردارهای شکل مود بدست آمده از دو حالت مذکور از لحاظ عددی با یکدیگر متفاوت بوده ولی لازم است از لحاظ الگوی تغییر شکل سازه کاملاً با یکدیگر هماهنگ باشند.

## 3 - بررسی ماتریس های جرم و سختی برای ساختمان یک طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن

درجات

آزادی در مرکز سختی سازه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 1 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم سقف با  $c.m.$  و مرکز سختی ستونها با  $c.s.$  مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی این سقف بر روی مرکز سختی ستونها در نظر گرفته می شود.



درجات

شکل 2:

آزادی منطبق بر مرکز سختی در ساختمان یک طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی و ماتریس جرم، به راحتی می توان تک تک درایه های ماتریس سختی و ماتریس جرم سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریسهای سختی و جرم مطابق ماتریسهای زیر دست یافت.

$$[K] = \begin{array}{ccc|c}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \\
 \hline
 K_x & 0 & 0 & \textcircled{1} \\
 \hline
 & K_y & 0 & \textcircled{2} \\
 \hline
 \text{(SYM.)} & & K_\theta & \textcircled{3}
 \end{array}
 \quad
 [M] = \begin{array}{ccc|c}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \\
 \hline
 m_x & 0 & m_x e_y & \textcircled{1} \\
 \hline
 & m_y & -m_y e_x & \textcircled{2} \\
 \hline
 \text{(SYM.)} & & m_\theta^* & \textcircled{3}
 \end{array}$$

در ماتریسهای فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند:

$K_x$  = مجموع سختی انتقالی ستونها در جهت  $x$ .

$K_y$  = مجموع سختی انتقالی ستونها در جهت  $y$ .

$K_\theta$  = مجموع سختی دورانی ستونها حول مرکز سختی ستونها ( حول نقطه  $c.s.$  ).

$m_x$  = اینرسی انتقالی سقف در جهت  $x$ .

$m_y$  = اینرسی انتقالی سقف در جهت  $y$ .

$m_\theta$  = اینرسی دورانی سقف حول مرکز جرم سقف ( حول نقطه  $c.m.$  ).

$m_\theta^*$  = اینرسی دورانی سقف حول مرکز سختی ستونها ( حول نقطه  $c.s.$  ).

$e_x$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در امتداد محور  $x$ .

$e_y$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در امتداد محور  $y$ .

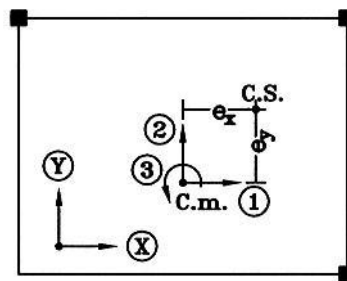
لازم به ذکر است که غالباً  $m_x = m_y$  می باشد. همچنین می توان  $m_\theta^*$  را از رابطه (3-1) بدست آورد:

$$m_\theta^* = m_\theta + m_x e_y^2 + m_y e_x^2 \quad (1-3)$$

#### 4- بررسی ماتریس های جرم و سختی برای ساختمان یک طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن درجات

##### آزادی در مرکز جرم سازه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 2 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم سقف با  $c.m.$  و مرکز سختی ستونها با  $c.s.$  مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی این سقف بر روی مرکز جرم سقف در نظر گرفته می شود.



شکل 3: درجات آزادی منطبق بر مرکز جرم در ساختمان یک طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی و ماتریس جرم، به راحتی می توان تک تک درایه های ماتریس سختی و ماتریس جرم سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریسهای سختی و جرم مطابق ماتریسهای زیر دست یافت.

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_x & 0 & -K_x e_y \\ & K_y & K_y e_x \\ \text{(SYM.)} & & K_\theta^* \end{bmatrix} \end{matrix} \quad [M] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ & m_y & 0 \\ \text{(SYM.)} & & m_\theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

پارامترهای بکار رفته در ماتریسهای فوق دقیقاً همان پارامترهای مبحث قبل بوده و تنها  $k_\theta^*$  مطابق زیر تعریف می گردد:

$$K_\theta^* = \text{مجموع سختی دورانی ستونها حول مرکز جرم طبقه}$$

می توان  $K_\theta^*$  را از رابطه (4-1) بدست آورد:

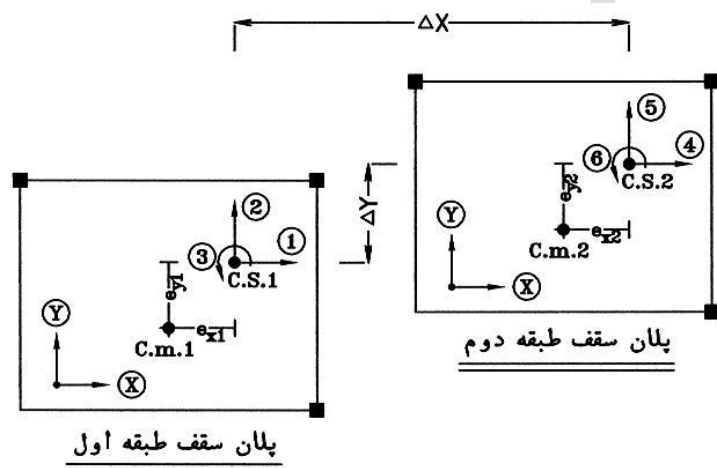
$$= K_{\theta} + K_x e_y^2 + K_y e_x^2 \quad (1-4)$$

$$K_{\theta}^*$$

5- بررسی ماتریس های جرم و سختی برای ساختمان دو طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن درجات

آزادی در مرکز سختی ستونهای هر طبقه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 3 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم هر سقف با  $c.m.$  و مرکز سختی ستونهای هر طبقه با  $c.s.$  مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی هر سقف بر روی مرکز سختی این ساختمان در سقف در نظر



شکل 4: درجات آزادی منطبق بر مرکز سختی در ساختمان دو طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی، می توان تک تک درایه های ماتریس سختی سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس سختی مطابق ماتریس زیر دست یافت :

	①	②	③	④	⑤	⑥	
[K] =	$K_{x1} + K_{x2}$	0	$-K_{x2} \cdot \Delta Y$	$-K_{x2}$	0	0	①
		$K_{y1} + K_{y2}$	$K_{y2} \cdot \Delta X$	0	$-K_{y2}$	0	②
			$K_{\theta 11} + K_{\theta 21}^*$	$K_{x2} \cdot \Delta Y$	$-K_{y2} \cdot \Delta X$	$-K_{\theta 22}$	③
				$K_{x2}$	0	0	④
					$K_{y2}$	0	⑤
		(SYM.)				$K_{\theta 22}$	⑥

ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$$\Delta x = \text{فاصله } x \text{ بین دو مرکز سختی .}$$

$$\Delta y = \text{فاصله } y \text{ بین دو مرکز سختی .}$$

$$K_{x1} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه اول در جهت } x .$$

$$K_{x2} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه دوم در جهت } x .$$

$$K_{y1} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه اول در جهت } y .$$

$$K_{y2} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه دوم در جهت } y .$$

$$K_{\theta 11} = \text{مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه اول حول مرکز سختی ستونهای طبقه اول .}$$

$$K_{\theta 22} = \text{مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه دوم حول مرکز سختی ستونهای طبقه دوم .}$$

$$K_{\theta 21}^* = \text{مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه دوم حول مرکز سختی ستونهای طبقه اول .}$$

می توان  $K_{\theta 21}^*$  را از رابطه (5 - 1) بدست آورد :

$$K_{\theta 21}^* = K_{\theta 22} + K_{x2} \Delta y^2 + K_{y2} \Delta x^2 \quad (1-5)$$

همچنین با توجه به مفهوم دراپه های ماتریس جرم، می توان تک ت ک دراپه های ماتریس جرم سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس جرم مطابق ماتریس زیر دست یافت :

$[M] =$	$m_{x1}$	0	$m_{x1} \cdot e_{y1}$	0	0	0	①
		$m_{y1}$	$-m_{y1} \cdot e_{x1}$	0	0	0	②
			$m_{\theta 1}^*$	0	0	0	③
				$m_{x2}$	0	$m_{x2} \cdot e_{y2}$	④
					$m_{y2}$	$-m_{y2} \cdot e_{x2}$	⑤
		(SYM.)				$m_{\theta 2}^*$	⑥

در ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$$m_{x1} = \text{اینرسی انتقالی سقف طبقه اول در جهت } x .$$

$$m_{x2} = \text{اینرسی انتقالی سقف طبقه دوم در جهت } x .$$

$$m_{y1} = \text{اینرسی انتقالی سقف طبقه اول در جهت } y .$$

$$m_{y2} = \text{اینرسی انتقالی سقف طبقه دوم در جهت } y .$$

$m_{\theta 1}^*$  = اینرسی دورانی سقف طبقه اول حول مرکز سختی ستونهای طبقه اول ( حول نقطه *c.s.1* ) .  
 $m_{\theta 2}^*$  = اینرسی دورانی سقف طبقه دوم حول مرکز سختی ستونهای طبقه دوم ( حول نقطه *c.s.2* ) .  
 $e_{x1}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور *x* .  
 $e_{x2}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه دوم ساختمان در امتداد محور *x* .  
 $e_{y1}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور *y* .  
 $e_{y2}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور *y* .  
 لازم به ذکر است که غالبا  $m_{x1} = m_{y1}$  و  $m_{x2} = m_{y2}$  می باشد. همچنین می توان  $m_{\theta 1}^*$  و  $m_{\theta 2}^*$  را از روابطه زیر بدست آورد :

$$= m_{\theta 1} + m_{x1} e_{y1}^2 + m_{y1} e_{x1}^2 \quad (2-5)$$

$$m_{\theta 1}^*$$

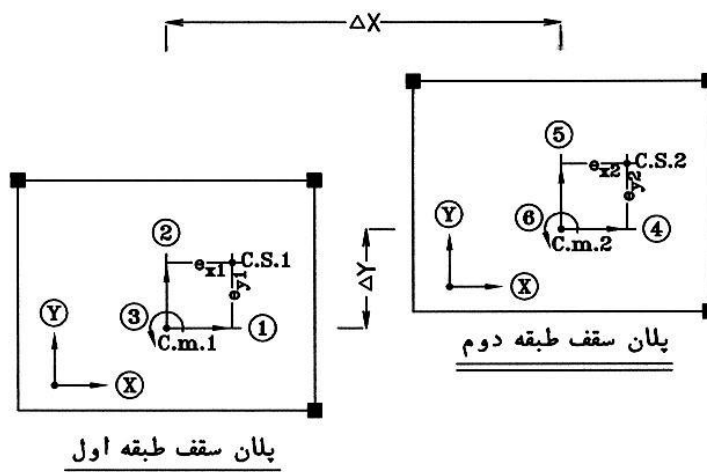
$$= m_{\theta 2} + m_{x2} e_{y2}^2 + m_{y2} e_{x2}^2 \quad (3-5)$$

$$m_{\theta 2}^*$$

## 6- بررسی ماتریس های جرم و سختی برای ساختمان دو طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن درجات

### آزادی در مرکز جرم سقف هر طبقه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 4 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم هر سقف با *c.m.* و مرکز سختی ستونهای هر طبقه با *c.s.* مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی این ساختمان در هر مرکز جرم آن سقف می شود .



شکل 5: درجات آزادی منطبق بر مرکز جرم در ساختمان دو طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی، می توان تک تک درایه های ماتریس سختی سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس سختی مطابق ماتریس زیر دست یافت :

$$[K] = \begin{array}{c|cccccc|c} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} & \\ \hline \textcircled{1} & K_{x1}+K_{x2} & 0 & -K_{x1} \cdot e_{y1} \\ & & & -K_{x2} \cdot e_{y12} & -K_{x2} & 0 & K_{x2} \cdot e_{y2} & \\ \hline \textcircled{2} & & K_{y1}+K_{y2} & K_{y1} \cdot e_{x1} \\ & & & +K_{y2} \cdot e_{x12} & 0 & -K_{y2} & -K_{y2} \cdot e_{x2} & \\ \hline \textcircled{3} & & & K_{\theta 11}^*+K_{\theta 21}^* & K_{x2} \cdot e_{y12} & -K_{y2} \cdot e_{x12} & K_{36}^* & \\ \hline \textcircled{4} & & & & K_{x2} & 0 & -K_{x2} \cdot e_{y2} & \\ \hline \textcircled{5} & & & & & K_{y2} & K_{y2} \cdot e_{x2} & \\ \hline \textcircled{6} & & & & & & K_{\theta 22}^* & \\ \hline \text{(SYM.)} & & & & & & & \end{array}$$

ماتریس

در

فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$$\Delta x = \text{فاصله بین دو مرکز جرم در امتداد محور } x.$$

$$\Delta y = \text{فاصله } y \text{ بین دو مرکز جرم در امتداد محور } y.$$

$$e_{x1} = \text{فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور } x.$$

$$e_{x2} = \text{فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه دوم ساختمان در امتداد محور } x.$$

$$e_{y1} = \text{فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور } y.$$

$$e_{y2} = \text{فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه اول ساختمان در امتداد محور } y.$$

$$e_{x12} = \text{فاصله بین مرکز جرم سقف طبقه اول و مرکز سختی ستونهای طبقه دوم در امتداد محور } x.$$

$$e_{y12} = \text{فاصله بین مرکز جرم سقف طبقه اول و مرکز سختی ستونهای طبقه دوم در امتداد محور } y.$$

می توان  $e_{x12}$  و  $e_{y12}$  را از روابط زیر بدست آورد :

$$(1-6)$$

$$(2-6)e_{x12} = e_{x2} + \Delta x$$

$$K_{x1} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه اول در جهت } x. \quad e_{y12} = e_{y2} + \Delta y$$

$$K_{x2} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه دوم در جهت } x.$$

$$K_{y1} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه اول در جهت } y.$$

$$K_{y2} = \text{مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه دوم در جهت } y.$$

$$K_{\theta 11} = \text{مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه اول حول مرکز سختی ستونهای طبقه اول.}$$

$K_{\theta 22}$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه دوم حول مرکز سختی ستونهای طبقه دوم .

$K_{\theta 11}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه اول حول مرکز جرم سقف طبقه اول .

$K_{\theta 22}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه دوم حول مرکز جرم سقف طبقه دوم .

$K_{\theta 21}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه دوم حول مرکز جرم سقف طبقه اول .

می توان  $K_{\theta 11}^*$  و  $K_{\theta 22}^*$  و  $K_{\theta 21}^*$  را از روابط زیر بدست آورد :

$$= K_{\theta 11} + K_{x1} e_{y1}^2 + K_{y1} e_{x1}^2 \quad (3-6)$$

$$= K_{\theta 22} + K_{x2} e_{y2}^2 + K_{y2} e_{x2}^2 \quad (4-6) K_{\theta 11}^*$$

$$= K_{\theta 22} + K_{x2} e_{y12}^2 + K_{y2} e_{x12}^2 \quad (5-6) K_{\theta 22}^*$$

$K_{\theta 21}^*$  مهمترین درایه ماتریس سختی فوق، درایه  $K_{36}^*$  می باشد که تنها روش

تعیین آن استفاده از روش تعادل نیروهای ایجاد شده در درجات آزادی سازه در اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی شماره شش می باشد . در اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی شماره شش، در تمامی درجات آزادی سازه نیروهایی ایجاد می شود که با توجه به تعادل سازه، با برابر صفر قرار دادن لنگر ناشی از این نیروها حول مرکز جرم سقف طبقه اول نهایتاً می توان درایه  $K_{36}^*$  ماتریس سختی را بدست آورد. اگر در درجه آزادی شماره 6، دوران واحد ( یک رادیان ) ایجاد شود نیروهای ایجاد شده در درجات آزادی 1، 2، 4، و 5 با توجه به درایه های ماتریس سختی مطابق زیر می باشد ( $F_i$  نیروی ایجاد شده در درجه آزادی  $i$  ام سازه می باشد) :

$$F_1 = K_{x2} e_{y2} , F_2 = -K_{y2} e_{x2} , F_3 = K_{3,6} = ? , F_4 = -K_{x2} e_{y2} , F_5 = K_{y2} e_{x2} , F_6 = K_{\theta 22}^*$$

نظر به آنکه سقف طبقه اول در مقابل تغییر شکل کاملاً مهار شده است لذا هیچ نیرویی به زمین منتقل نمی شود بنابراین لازم است سقفهای اول و دوم تحت نیروهای  $F_1$  الی  $F_6$  دارای تعادل باشند. با نوشتن تعادل لنگرها حول مرکز جرم سقف طبقه اول، نتیجه می شود :

$$F_3 = -F_6 + F_4 \Delta y - F_5 \Delta x = -K_{\theta 22}^* - K_{x2} e_{y2} \Delta y - K_{y2} e_{x2} \Delta x$$

$$F_3 = K_{3,6} = - (K_{\theta 22}^* + K_{x2} e_{y2} \Delta y + K_{y2} e_{x2} \Delta x)$$

$$K_{36}^* = - ( K_{\theta 22}^* + K_{x2} e_{y2} \Delta y + \quad (6-6)$$

$K_{y2} e_{x2} \Delta x$  ) که  $K_{\theta 22}^*$  از رابطه زیر بدست می آید :

$$= K_{\theta 22} + K_{x2} e_{y2}^2 + K_{y2} e_{x2}^2 \quad (7-6)$$

$K_{\theta 22}^*$  با جاگذاری رابطه (7-6) در رابطه (6-6) نهایتاً می توان به رابطه (9-6) دست یافت :

$$K_{36}^* = - (K_{\theta 22} + K_{x2} e_{y2}^2 + K_{y2} e_{x2}^2 + K_{x2} e_{y2} \Delta y + K_{y2} \quad (8-6)$$

$$K_{36}^* = - [ K_{\theta 22} + K_{x2} ( e_{y2}^2 + e_{y2} \Delta y ) + K_{y2} ( \quad (9-6) e_{x2} \Delta x )$$

(  $e_{x2}^2 + e_{x2} \Delta x$  ) همچنین با توجه به مفهوم درایه های ماتریس جرم، می توان تک تک درایه های ماتریس جرم سازه فوق را تشکیل داد و نهایتا به ماتریس جرم مطابق ماتریس زیر دست یافت :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\theta 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\theta 2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{matrix}$$

(SYM.)

در ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

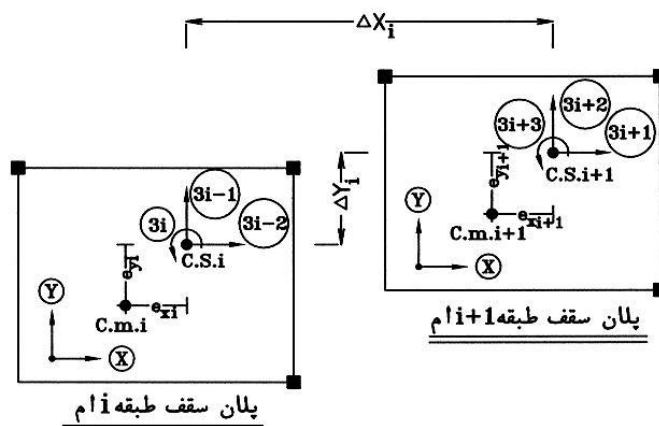
- .  $m_{x1}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه اول در جهت  $x$ .
  - .  $m_{x2}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه دوم در جهت  $x$ .
  - .  $m_{y1}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه اول در جهت  $y$ .
  - .  $m_{y2}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه دوم در جهت  $y$ .
  - .  $m_{\theta 1}$  = اینرسی دورانی سقف طبقه اول حول مرکز جرم سقف طبقه اول ( حول نقطه  $c.m.1$  ).
  - .  $m_{\theta 2}$  = اینرسی دورانی سقف طبقه دوم حول مرکز جرم سقف طبقه دوم ( حول نقطه  $c.m.2$  ).
- لازم به ذکر است که غالبا  $m_{x1} = m_{y1}$  و  $m_{x2} = m_{y2}$  می باشد.

## 7- بررسی ماتریس های جرم و سختی برای ساختمان $n$ طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن درجات

### آزادی در مرکز سختی ستونهای هر طبقه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 5 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم هر سقف با  $c.m.$  و مرکز سختی ستونهای هر طبقه با  $c.s.$  مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی این ساختمان در هر مرکز سختی ستونهای گرفته می شود.

سقف بر روی آن سقف در نظر



شکل 6: درجات آزادی منطبق بر مرکز سختی در ساختمانها طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی، می توان تک تک درایه های ماتریس سختی سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس سختی مطابق ماتریس زیر دست یافت :

قطر ماتریس سختی

$$[K]_i = \begin{bmatrix} K_{x_i} + K_{x_{i+1}} & 0 & -K_{x_{i+1}} \cdot \Delta Y_i & -K_{x_{i+1}} & 0 & 0 \\ & K_{y_i} + K_{y_{i+1}} & K_{y_{i+1}} \cdot \Delta X_i & 0 & -K_{y_{i+1}} & 0 \\ \text{(SYM.)} & & K_{\theta_{ii}} + K_{\theta_{i+1,i}}^* & K_{x_{i+1}} \cdot \Delta Y_i & -K_{y_{i+1}} \cdot \Delta X_i & -K_{\theta_{i+1,i}} \end{bmatrix}$$

در

ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$\Delta x_i$  = فاصله بین مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  و  $i+1$  ام در امتداد محور  $x$ .

$\Delta y_i$  = فاصله بین مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  و  $i+1$  ام در امتداد محور  $y$ .

$K_{x_i}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i$  ام در جهت  $x$ .

$K_{x_{i+1}}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i+1$  ام در جهت  $x$ .

$K_{y_i}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i$  ام در جهت  $y$ .

$K_{y_{i+1}}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i+1$  ام در جهت  $y$ .

$K_{\theta_{ii}}$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  ام.

$K_{\theta_{i+1,i+1}}$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i+1$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i+1$  ام.

$K_{\theta_{i+1,i}}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i+1$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  ام.

می توان  $K_{\theta_{i+1,i}}^*$  را از رابطه (7-1) بدست آورد :

$$= K_{\theta_{i+1,i+1}} + K_{x_{i+1}} \Delta y_i^2 + K_{y_{i+1}} \Delta x_i^2 \quad (1-7)$$

$$K_{\theta_{i+1,i}}^*$$

همچنین با توجه به مفهوم درایه های ماتریس جرم، می توان تک تک درایه های ماتریس جرم

سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس جرم مطابق ماتریس زیر دست یافت :

قطر ماتریس جرم

$$[M]_i = \begin{bmatrix} m_{x_i} & 0 & m_{x_i} \cdot e_{y_i} & 0 & 0 & 0 \\ & m_{y_i} & -m_{y_i} \cdot e_{x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(SYM.)} & & m_{\theta_i}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$m_{xi}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه  $i$  ام در جهت  $x$ .

$m_{yi}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه  $i$  ام در جهت  $y$ .

$m_{\theta i}$  = اینرسی دورانی سقف طبقه  $i$  ام حول مرکز جرم سقف طبقه  $i$  ام.

$m_{\theta i}^*$  = اینرسی دورانی سقف طبقه  $i$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  ام.

$e_{xi}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه  $i$  ام ساختمان در امتداد محور  $x$ .

$e_{yi}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه  $i$  ام ساختمان در امتداد محور  $y$ .

لازم به ذکر است که غالباً  $m_{xi} = m_{yi}$  می باشد. همچنین می توان  $m_{\theta i}^*$  را از رابطه زیر بدست

آورد :

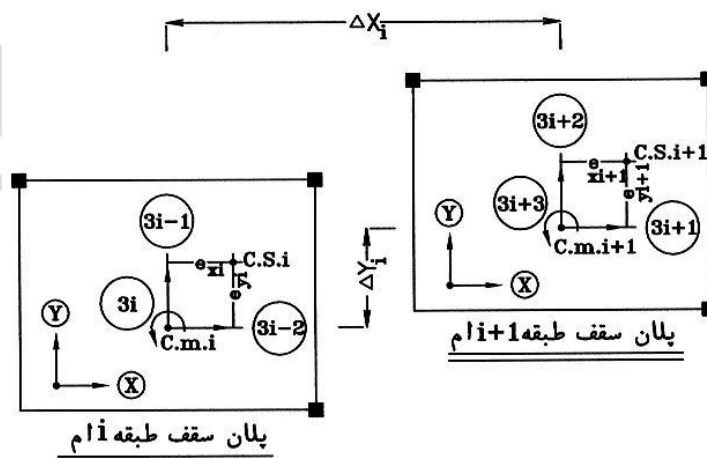
$$= m_{\theta i} + m_{xi} e_{yi}^2 + m_{yi} e_{xi}^2 \quad (2-7)$$

$$m_{\theta i}^*$$

8- بررسی ماتریس های جرم و سختی برای یک ساختمان  $n$  طبقه پیچشی - برشی با در نظر گرفتن درجات

آزادی در مرکز جرم هر طبقه

یک قاب برشی با سقف صلب مطابق شکل شماره 6 در نظر گرفته می شود. مرکز جرم هر سقف با  $c.m.$  و مرکز سختی ستونهای هر طبقه با  $c.s.$  مشخص گردیده اند. درجات آزادی انتقالی و پیچشی این ساختمان در هر سقف بر روی مرکز جرم آن سقف در نظر گرفته می شود.



شکل 7: درجات آزادی منطبق بر مرکز جرم در ساختمان  $n$  طبقه

با توجه به مفهوم درایه های ماتریس سختی، می توان تک تک درایه های ماتریس سختی سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس سختی مطابق ماتریس زیر دست یافت :

قطر ماتریس سختی

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \textcircled{3i-2} & & & & & & \\ & \textcircled{3i-1} & & & & & \\ & & \textcircled{3i} & & & & \\ & & & \textcircled{3i+1} & & & \\ & & & & \textcircled{3i+2} & & \\ & & & & & \textcircled{3i+3} & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xi}+K_{xi+1} & 0 & -K_{xi} \cdot e_{yi} & -K_{xi+1} & 0 & K_{xi+1} \cdot e_{yi+1} & \textcircled{3i-2} \\ & K_{yi}+K_{yi+1} & K_{yi} \cdot e_{xi} & 0 & -K_{yi+1} & -K_{yi+1} \cdot e_{xi+1} & \textcircled{3i-1} \\ & & K_{\theta ii}^*+K_{\theta i+1,i}^* & K_{xi+1} \cdot e_{yi+1} & -K_{yi+1} \cdot e_{xi+1} & K_{3i,3i+3}^* & \textcircled{3i} \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند :

$\Delta x_i$  = فاصله بین مرکز جرم سقف طبقه  $i$  و  $i+1$  ام در امتداد محور  $x$ .

$\Delta y_i$  = فاصله بین مرکز جرم سقف طبقه  $i$  و  $i+1$  ام در امتداد محور  $y$ .

$e_{xi}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه  $i$  ام ساختمان در امتداد محور  $x$ .

$e_{yi}$  = فاصله بین مرکز سختی ستونها و مرکز جرم سقف در طبقه  $i$  ام ساختمان در امتداد محور  $y$ .

$e_{x,i,i+1}$  = فاصله بین مرکز جرم طبقه  $i$  و مرکز سختی ستونهای طبقه  $i+1$  ام در امتداد محور  $x$ .

$e_{y,i,i+1}$  = فاصله  $y$  بین مرکز جرم طبقه  $i$  و مرکز سختی ستونهای طبقه  $i+1$  ام .

می توان  $e_{x,i,i+1}$  و  $e_{y,i,i+1}$  را از روابط زیر بدست آورد :

$$e_x \quad (1-8)$$

$$(2-8)_{i,i+1} = e_x \quad i+1 \quad + \quad \Delta x_i$$

$e_{y,i,i+1} = e_{y,i+1} + \Delta y_i K_{xi}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i$  ام در جهت  $x$ .

$K_{xi+1}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i+1$  ام در جهت  $x$ .

$K_{yi}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i$  ام در جهت  $y$ .

$K_{y,i+1}$  = مجموع سختی انتقالی ستونهای طبقه  $i+1$  ام در جهت  $y$ .

$K_{\theta ii}$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i$  ام .

$K_{\theta i+1,i+1}$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i+1$  ام حول مرکز سختی ستونهای طبقه  $i+1$  ام .

$K_{\theta i,i}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i$  ام حول مرکز جرم سقف طبقه  $i$  ام .

$K_{\theta i+1,i+1}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i+1$  ام حول مرکز جرم سقف طبقه  $i+1$  ام .

$K_{\theta i+1,i}^*$  = مجموع سختی دورانی ستونهای طبقه  $i+1$  ام حول مرکز جرم سقف طبقه  $i$  ام .

می توان  $K_{\theta i,i}^*$  و  $K_{\theta i+1,i+1}$  و  $K_{\theta i+1,i}^*$  را از روابط زیر بدست آورد :

$$= K_{\theta i, i} + K_{x i} e_{y i}^2 + K_{y i} e_{x i}^2 \quad (3-8)$$

$$K_{\theta i, i}^*$$

$$K_{\theta}^* = K_{\theta i+1, i+1} + K_{x i+1} e_{y i+1}^2 + K_{y i+1} e_{x i+1}^2 \quad (4-8)$$

$$i+1, i+1$$

$$= K_{\theta i+1, i+1} + K_{x i+1} e_{y i, i+1}^2 + K_{y i+1} e_{x i, i+1}^2 \quad (5-8)$$

$K_{\theta}^*_{i+1, i}$  مهمترین درایه ماتریس سختی فوق، درایه  $K^*_{3i, 3i+3}$  می باشد که تنها روش تعیین آن استفاده از روش تعادل نیروهای ایجاد شده در درجات آزادی سازه در اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی شماره  $3i+3$  می باشد. در اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی شماره  $3i+3$ ، در تمامی درجات آزادی سازه نیروهایی ایجاد می شود که با توجه به تعادل سازه، با برابر صفر قرار دادن لنگر ناشی از این نیروها حول مرکز جرم سقف طبقه  $i$  ام، نهایتاً می توان درایه  $K^*_{3i, 3i+3}$  ماتریس سختی را از رابطه زیر بدست آورد:

$$K^*_{3i, 3i+3} = - ( K_{\theta i+1, i+1}^* + K_{x i+1} e_{y i+1} \Delta y_i + K_{y i+1} e_{x i+1} \Delta x_i ) \quad (6-8)$$

که  $K_{\theta i+1, i+1}^*$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$K_{\theta}^* = K_{\theta i+1, i+1} + K_{x i+1} e_{y i+1}^2 + K_{y i+1} e_{x i+1}^2 \quad (7-8)$$

$$i+1, i+1$$

با جاگذاری رابطه (7-8) در رابطه (6-8) نهایتاً می توان به رابطه (8-9) دست یافت:

$$K^*_{3i, 3i+3} = - ( K_{\theta i+1, i+1} + K_{x i+1} e_{y i+1}^2 + K_{y i+1} e_{x i+1}^2 + K_{x i+1} e_{y i+1} \Delta y_i + K_{y i+1} e_{x i+1} \Delta x_i ) \quad (8-8)$$

$$K^*_{3i, 3i+3} = - [ K_{\theta i+1, i+1} + K_{x i+1} ( e_{y i+1}^2 + e_{y i+1} \Delta y_i ) + K_{y i+1} ( e_{x i+1}^2 + e_{x i+1} \Delta x_i ) ] \quad (9-8)$$

همچنین با توجه به مفهوم درایه های ماتریس جرم، می توان تک تک درایه های ماتریس جرم سازه فوق را تشکیل داد و نهایتاً به ماتریس جرم مطابق ماتریس زیر دست یافت:

قطر ماتریس جرم

$$[M]_i = \begin{bmatrix} m_{x i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (3i-2) \\ 0 & m_{y i} & 0 & 0 & 0 & 0 & (3i-1) \\ (SYM.) & 0 & m_{\theta i} & 0 & 0 & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، پارامترهای بکار رفته مطابق زیر تعریف می گردند:

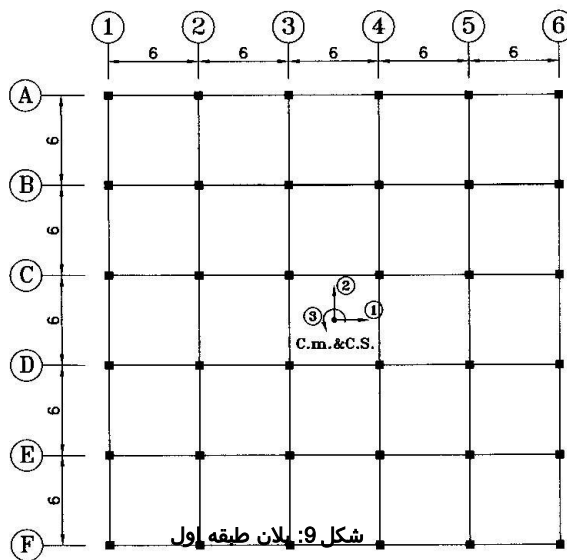
$m_{x i}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه  $i$  ام در جهت  $x$ .

$m_{y i}$  = اینرسی انتقالی سقف طبقه  $i$  ام در جهت  $y$ .

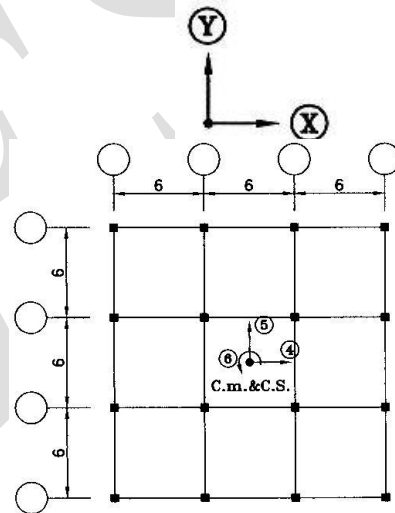
$m_{\theta i}$  = اینرسی دورانی سقف طبقه  $i$  ام حول مرکز جرم سقف طبقه  $i$  ام.  
 لازم به ذکر است که غالباً  $m_{xi} = m_{yi}$  می باشد.

### 9 - مثالهای عددی

با توجه به آنکه برای هر سقف ساختمان سه درجه آزادی وجود دارد لذا برای ساختمانهای با تعداد طبقات زیاد، حجم نتایج خروجی بخصوص شکل مودهای ارتعاش سازه افزایش قابل توجهی می یابد. برای عدم افزایش بی مورد حجم نتایج خروجی، برای مثال عددی یک ساختمان دو طبقه اسکلت بتنی در نظر گرفته می شود. پلان سقف طبقه اول این ساختمان مطابق شکل شماره 7 و پلان سقف طبقه دوم مطابق شکل شماره 8 می باشد.



شکل 9: پلان طبقه اول



شکل 8: پلان طبقه دوم ساختمان

ساختمان

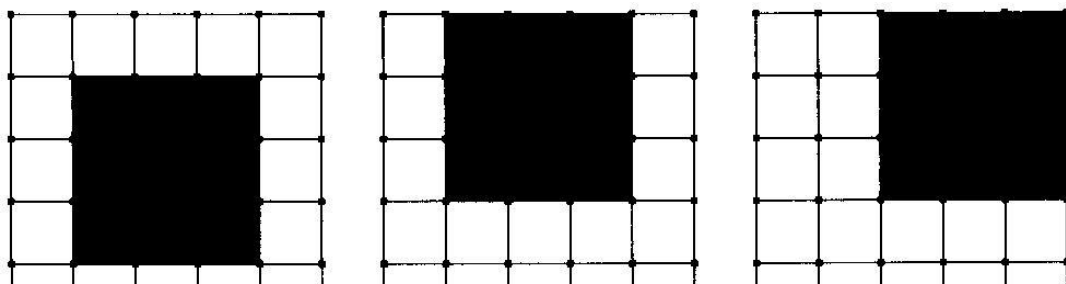
مشخص است که در هر طبقه، مرکز جرم بر مرکز سختی آن طبقه منطبق است. ولی نحوه قرار گیری طبقه دوم بر روی طبقه اول می تواند به حالت‌های مختلفی صورت پذیرد. در این مثال سه حالت مختلف در نظر گرفته می شود که عبارتند از:

حالت اول: طبقه دوم نسبت به طبقه اول هیچ خروج از مرکزیتی ندارد.

حالت دوم: طبقه دوم نسبت به طبقه اول در جهت  $Y$  به میزان 6 متر خروج از مرکزیت دارد.

حالت سوم: طبقه دوم نسبت به طبقه اول در جهت  $Y$  و همچنین در جهت  $X$  هر کدام به میزان 6 متر خروج از مرکزیت دارند.

حالت‌های قرار گیری طبقه دوم بر روی طبقه اول در شکل شماره 9 مشخص شده است:



اول

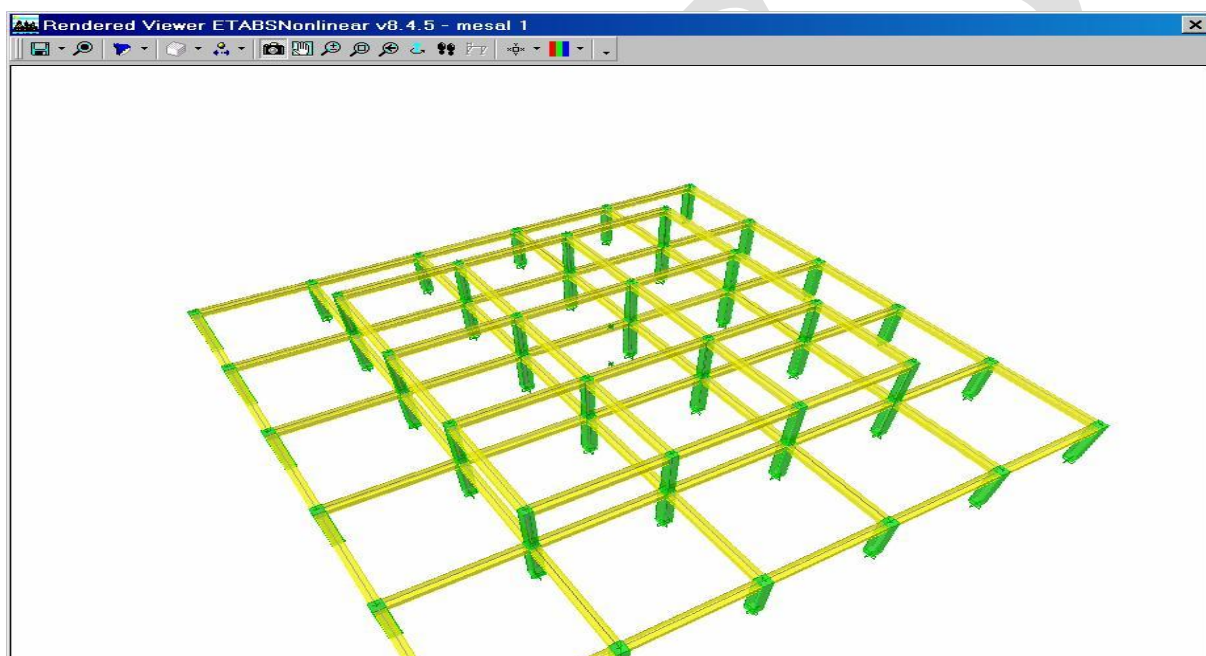
حالت سوم

حالت دوم

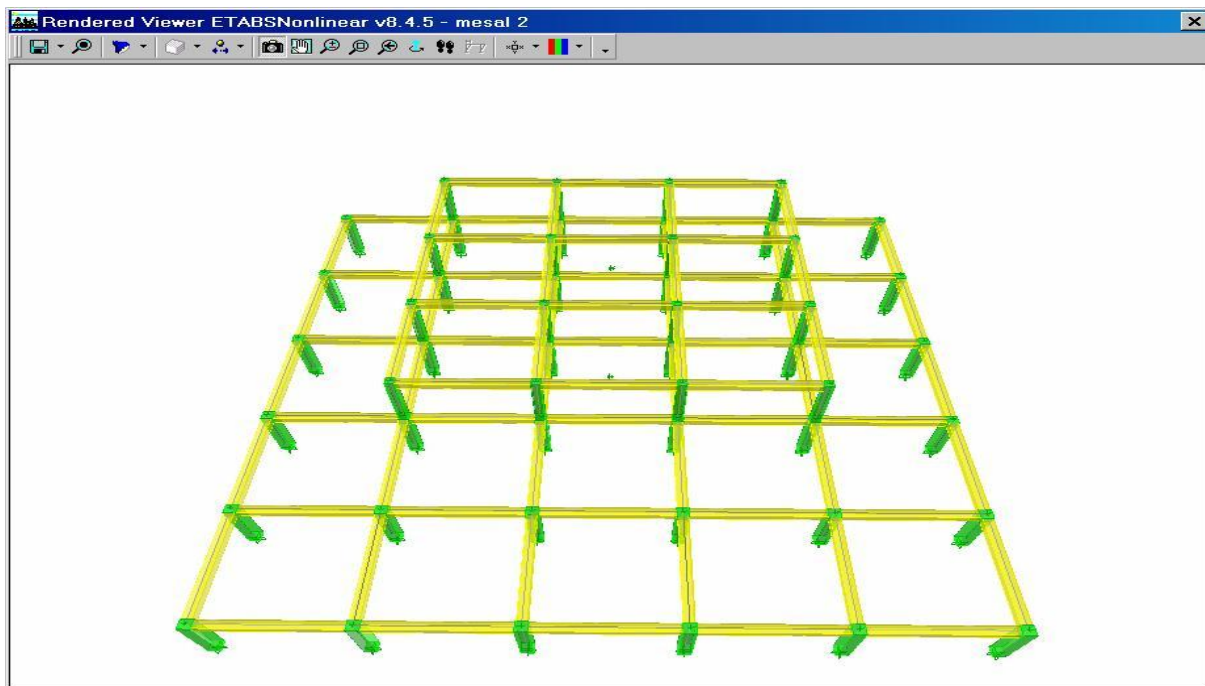
حالت

شکل شماره 10: حالت‌های مختلف قرارگیری طبقه دوم بر روی طبقه اول

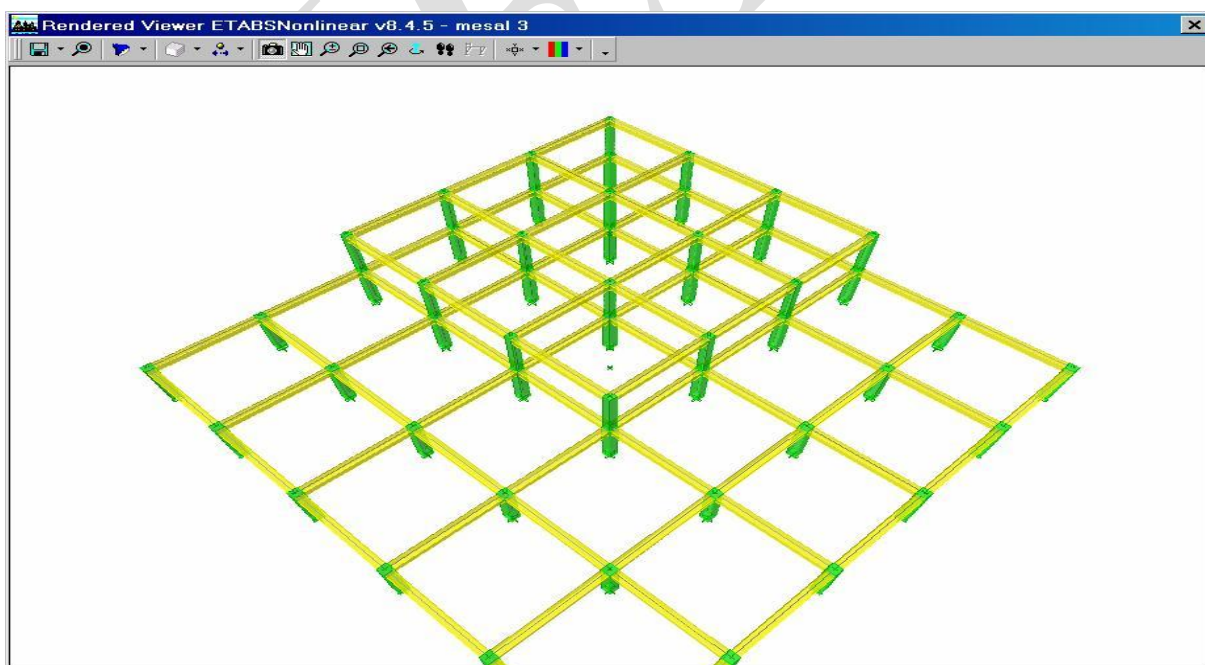
شکل‌های سه بعدی حالت‌های فوق که توسط نرم افزار *ETABS* ترسیم گردیده است در اشکال شماره 10، 11 و 12 آمده است.



شکل 11: شکل سه بعدی سازه در حالت اول



شکل 12: شکل سه بعدی سازه در حالت دوم



شکل 13: شکل سه بعدی سازه در حالت سوم

درجات آزادی 1، 2 و 3 به ترتیب مربوطه به انتقال در جهت  $x$ ، انتقال در جهت  $y$  و دوران حول محور  $z$  در سقف اول ساختمان و درجات آزادی 4، 5 و 6 به ترتیب مربوطه به انتقال در جهت  $x$ ، انتقال در جهت  $y$  و دوران حول محور  $z$  در سقف دوم ساختمان می باشد. نظر به آنکه ساختمان دارای شش درجه آزادی می باشد لذا دارای شش فرکانس و شش مود ارتعاشی می باشد. در تمام قسمتهای این مثال از واحد تن ( بر حسب نیرو و یا جرم  $9.81$  / وزن = جرم ) و واحد متر استفاده می شود. وزن یک متر مربع از سقف برابر  $1.2 \text{ ton/m}^2$  فرض می شود. و لذا جرم انتقالی و دورانی طبقات مطابق مقادیر زیر می باشند :

$$= 30*30*1.2/9.81 = \quad \text{اینرسی انتقالی ( جرم ) سقف طبقه اول در جهت } x \text{ و } y :$$

$$m_{x1} = m_{y1} = 110.092 \text{ ton}$$

$$= 18*18*1.2/9.81 = 39.633 \quad \text{اینرسی انتقالی ( جرم ) سقف طبقه دوم در جهت } x \text{ و } y :$$

$$m_{x2} = m_{y2} = 39.633 \text{ ton}$$

اینرسی دورانی (جرم دورانی) سقف طبقه اول حول مرکز جرم سقف طبقه اول برابر است با :

$$m_{\theta 1} = 110.092*(30^2+30^2)/12 = 16513.8 \text{ ton.m}^2$$

اینرسی دورانی (جرم دورانی) سقف طبقه دوم حول مرکز جرم سقف طبقه دوم برابر است با :

$$m_{\theta 2} = 39.633*(18^2+18^2)/12 = 2140.182 \text{ ton.m}^2$$

ساختمان بصورت برشی فرض می شود و ابعاد ستونهای طبقه دوم برابر 40 سانتیمتر و ابعاد ستونهای طبقه اول برابر 50 سانتیمتر در نظر گرفته می شوند. و ارتفاع طبقات برابر  $3.3 \text{ m}$  فرض می شوند. لذا سختی انتقالی و دورانی طبقات مطابق مقادیر زیر می باشند :

سختی انتقالی هر یک از ستونهای طبقه اول برابر است با ( با اعمال ضریب  $0.7$  بر روی ممان اینرسی ستونها طبق آیین نامه ) :

$$K_{Ix0}=K_{Iy0}=12*E*I/L^3 = 12*2.1e6*(0.7*0.5^4/12)/3.3^3 = 2556.557 \text{ ton/m}$$

سختی انتقالی هر یک از ستونهای طبقه دوم برابر است با ( با اعمال ضریب  $0.7$  بر روی ممان اینرسی ستونها طبق آیین نامه ) :

$$K_{2x0}=K_{2y0}=12*E*I/L^3 = 12*2.1e6*(0.7*0.4^4/12)/3.3^3 = 1047.166 \text{ ton/m}$$

و لذا سختی انتقالی ستونهای طبقه اول برابر است با :

$$K_{x1} = K_{y1} = 6*6*3652.225 = 92036.052 \text{ ton/m}$$

و سختی انتقالی ستونهای طبقه دوم برابر است با :

$$K_{x2} = K_{y2} = 4*4*1047.166 = 16754.656 \text{ ton/m}$$

و سختی دورانی ستونهای طبقه اول برابر است با :

$$K_{\theta} = \sum ( K_x Y_i^2 + K_y X_i^2 ) = K_{Ix0} \sum ( Y_i^2 + X_i^2 )$$

$$K_{\theta 11} = 2556.557 * ( 2*6*3^2 + 2*6*9^2 + 2*6*15^2 ) * 2 = 19327570.92 \text{ ton.m/rad}$$

و سختی دورانی ستونهای طبقه دوم برابر است با :

$$K_{\theta 22} = 1047.166 * ( 2*4*3^2 + 2*4*9^2 ) * 2 = 1507919.04 \text{ ton.m/rad}$$

برای هر یک از حالات اول ، دوم و سوم ، ساختمان به کمک نرم افزار نوشته شده توسط مولف ، تحلیل گردیده و نتایج تحلیل در جداول شماره 1 ، 2 ، 3 و 4 آمده است . همچنین در بررسی انجام شده ، این نتایج تحلیل با نتایج تحلیل با نرم افزار ETABS کاملا مشابه بوده و کوچکترین تفاوتی وجود ندارد. البته لازم به ذکر است که در هنگام استفاده از نرم افزار ETABS لازم است به نکات زیر توجه شود :

- 1 - تمام تکیه گاهها در محل پای ستونها باید صلب فرض شوند.
  - 2 - برای تمامی گره های طبقات لازم است ، انتقال در راستای  $z$  و دوران حول محورهای  $x$  و  $y$  با قرار دادن تکیه گاه مهار شوند تا سازه مشابه یک سازه برشی مدل گردد و همچنین سقف سازه باید صلب معرفی گردد.
  - 3 - برای حذف تغییر شکلهای برشی اعضا لازم است ضریب سطح مقطع برشی ستونها را با عددی بسیار بزرگ جایگزین نمود.
  - 4 - برای حذف تغییر شکلهای پیچشی اعضا لازم است ضریب ثابت پیچشی ستونها را با عدد صفر جایگزین نمود.
  - 5 - جرم تیرها و ستونها حذف شود و جرم انتقالی و دورانی طبقات بصورت متمرکز در مرکز جرم هر سقف به کامپیوتر معرفی شود.
- نتایج تحلیل سازه در سه حالت مذکور در جداول زیر آمده است.

جدول شماره 1: فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی سازه برای حالتول ( بدون خروج از مرکزیت)

شماره مود	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم	مود ششم
پریود (T)	.3481862	.3481862	.2551534	.1907251	.1907251	.1703843
شکل مود های ارتعاشی سازه	$\Phi_1$	1	0	0	0	0
	$\Phi_2$	0	1	0	0	0
	$\Phi_3$	0	0	1	0	0
	$\Phi_4$	4.353443	0	0	-0.63807	0
	$\Phi_5$	0	4.353443	0	0	-0.63807
	$\Phi_6$	0	0	7.176494	0	0

با توجه به شکل مودهای ارتعاش سازه ، ملاحظه میگردد در این حالت که خروج از مرکزیتی در ساختمان وجود ندارد ، مودهای ارتعاش سازه برای ارتعاش در جهت  $x$  و  $y$  و همچنین دوران حول  $z$  کاملا مستقل از یکدیگر می باشند. یعنی می توان سازه را بطور مستقل برای هر یک از جهتهای فوق تحلیل نموده و سپس نتایج تحلیل را با یکدیگر جمع جبری نمود. و شکل مودها برای ارتعاشات انتقالی ( مثل مودهای 1 ، 2 ، 4 و 5 ) دقیقا در جهت مختصات  $x$  و  $y$  میباشد.

جدول شماره 2: فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی سازه برای حالت دو (با خروج از مرکزیت در جهت  $z$ )

شماره مود	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم	مود ششم
پرید (T)	.3536505	.3481862	.2541841	.1933959	.1907251	.1660658
شکل مود های ارتعاشی سازه	$\Phi_1$	0	1	1	0	1
	$\Phi_2$	0	1	0	1	0
	$\Phi_3$	-0.02666	0	0.2425823	-0.02254	0
	$\Phi_4$	4.579031	0	1.02269	-0.57772	0
	$\Phi_5$	0	4.353443	0	0	-0.63807
	$\Phi_6$	-0.04830	0	1.827126	-0.04526	0

از جدول 2 ملاحظه می گردد که مود دوم و مود چهارم که مربوط به ارتعاش انتقالی سازه در راستای محور  $y$  می باشد مستقل از راستای  $x$  و  $z$  می باشند و علت این امر آن است که سازه در راستای محور  $y$  دارای خروج از مرکزیت نمی باشد.

جدول شماره 3: فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی سازه برای حالت سوم ( با خروج از مرکزیت در جهت  $x$  و  $y$ )

شماره مود	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم	مود ششم
پرید (T)	.358916	.3481862	.2533312	.1953065	.1907251	.1625743
شکل مود های ارتعاشی سازه	$\Phi_1$	1	1	1	1	1
	$\Phi_2$	-1	1	-1	-1	-1
	$\Phi_3$	-0.05338	0	0.2423126	0.0377682	0
	$\Phi_4$	4.79973	4.353443	0.99723	-0.534034	-0.63807
	$\Phi_5$	-4.79973	4.353443	-0.99723	0.534034	-0.63807
	$\Phi_6$	-0.09447	0	1.909203	-0.080543	0

از جدول شماره 4 ملاحظه می گردد که ارتعاش سازه در هیچ یک از جهتها مستقل از دیگر جهات نمی باشد و علت این امر آن است که سازه هم در جهت  $x$  و هم در جهت  $y$  دارای خروج از مرکزیت می باشد.

همچنین با مقایسه جداول شماره 1 ، 2 و 3 ملاحظه می گردد که با ایجاد خروج از مرکزیت یکطرفه و یا دوطرفه، در پریدهای ارتعاشی سازه در مودهای هم شماره، تفاوت چشمگیری بوجود نمی آید و حداکثر تفاوتها در حدود سه درصد می باشد. ولی در شکل مودهای ارتعاشی سازه تفاوتها بسیار قابل توجهی بوجود می آید که در نتیجه در تغییر مکانها و در نیروهای ایجاد شده در اعضاء سازه تفاوت چشمگیری ایجاد می نمایند.

از مقایسه مطالب بخش 7 با بخش 8 و 9، می توان دریافت که اگر درجات آزادی هر طبقه را در مرکز سختی ستونهای آن طبقه قرار دهیم ماتریسهای جرم و سختی و فرمولهای مربوطه به مراتب ساده تر از حالتی خواهد بود که درجات آزادی را بر روی مرکز جرم سقف طبقات قرار دهیم. با توجه به مطالب مذکور در این مقاله، نهایتاً می توان برای یک ساختمان  $n$  طبقه پیچشی - برشی، با هر موقعیتی برای مراکز جرم و مراکز سختی در طبقات ساختمان، به راحتی ماتریسه ای جرم و سختی سازه را تشکیل داده و از آنجا با توجه به روابط تحلیل دینامیکی سازه ها، فرکانسها و مودهای ارتعاشی سازه را با روشهای عددی همچون روش ژاکوبی تعیین کرده و سپس با استفاده از روش آنالیز مودال اقدام به تحلیل دینامیکی و یا شبه دینامیکی سازه نمود.

مؤلف این مقاله در این راستا نرم افزاری نوشته است که می تواند برای ساختمانهای پیچشی با هر تعداد طبقات، ماتریسهای جرم و سختی را تشکیل داده و فرکانسها و مودهای ارتعاشی سازه را در دو حالت زیر محاسبه نماید:

حالت اول: درجات آزادی هر سقف بر روی مرکز سختی ستونهای آن طبقه قرار داده شود.  
حالت دوم: درجات آزادی هر سقف بر روی مرکز جرم آن سقف قرار داده شود.  
هر یک از دو روش فوق، منجر به تشکیل ماتریسهای جرم و سختی خاص خود برای سازه خواهد شد البته با توجه به آنکه فرکانسها و مودهای ارتعاشی یک سازه مستقل از محل در نظر گرفتن درجات آزادی سازه می باشند لذا نهایتاً در هر دو روش، باید فرکانسهای ارتعاشی بدست آمده کاملاً یکسان بوده و همچنین شکل نهایی مودهای ارتعاشی نیز با یکدیگر مشابه باشند. البته با توجه به آنکه محل قرار گیری درجات آزادی در حالتهای اول و دوم با یکدیگر متفاوت می باشند لذا بردارهای شکل مود بدست آمده از دو حالت مذکور از لحاظ عددی با یکدیگر متفاوت بوده ولی لازم است از لحاظ الگوی تغییر شکل سازه کاملاً با یکدیگر هماهنگ باشند. در مثالهای حل شده در بیش از هزار مورد از ساختمانهای یک الی صد طبقه، برابر بودن فرکانسها و شکل مودهای ارتعاشی به کمک دو حالت مذکور بررسی گردیده و به تایید رسیده است.

بهتر است فرکانسهای ارتعاشی مودهای پیچشی به فرکانس ارتعاشی مودهای انتقالی نزدیک نباشند زیرا در این صورت اثر بیشینه دو مود بصورت جبری به یکدیگر اضافه گردیده و باعث افزایش تغییر مکانها و در نتیجه نیروهای ایجاد شده در سازه می گردد. در ساختمانهای دارای سحنی پیچشی بالا غالباً فرکانسهای پیچشی به مراتب بیشتر از فرکانسهای انتقالی سازه بوده و لذا مشکل فوق بوجود نمی آید ولی در ساختمانهای دارای هسته مقاوم مرکزی امکان وقوع مشکل فوق وجود دارد. برای جلوگیری از این مشکل در ساختمانهای دارای هسته مرکزی، کفایت با انتقال بخشی از عناصر

هسته مقاوم به پیرامون سازه فرکانس پیچشی سازه را تغییر داد و مقدار آن را از فرکانس انتقالی سازه دور نمود.

در پایان، شایان ذکر است که: 1- در این مقاله، ساختمانها بصورت مد ل تیر برشی در نظر گرفته شده اند چنین فرضی مادام که تغییرشکل محوری ستونها قابل صرف نظر باشد، مثلاً برای ساختمانهای کوتاه دارای دقت مناسب و کافی می باشد ولی برای ساختمانهای بلند امکان وقوع خطای قابل توجه وجود دارد.

2 - در ساختمانهای برشی به راحتی می توان سختی انتقالی و سختی دورانی ستونها و در نتیجه مرکز سختی ستونها ( C.S. ) را در هر طبقه تعیین نمود ولی در مورد ساختمانهای خمشی، مطلب پیچیده تر بوده و لازم است بررسیهای لازم در این مورد صورت پذیرد.